بهینه سازی
مبانی بهینه سازی نامقید

محسن هوشمند
دانشکده تکنولوژی اطلاعات و علم رایانه
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان

مشتق

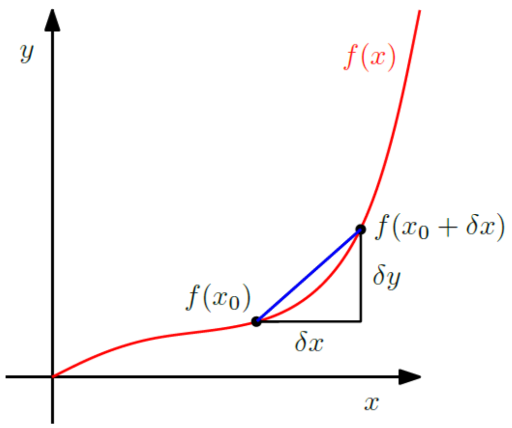
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- مشتق مرتبهٔ اول

$$\frac{df}{dx} = f'(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon}$$

- مشتق مرتبهٔ دوم

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = f''(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f'(x+\epsilon) - f'(x)}{\epsilon}$$



قواعد

- قاعدهٔ جمع

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

- قاعدهٔ ضرب

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

- قاعده خارج‌قسمت

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

- قاعدهٔ زنجیری

$$(g(f(x)))' = g'(f(x))f'(x)$$

پیدار تیلور

نمایش تابع مبتنی بر جمع تعداد نامتناهی از مشتق‌ها

- ارزیابی راحت
- مشتق‌پذیری

تعریف چندجمله‌ای تیلور

چندجمله‌ای تیلور درجه n از تابع $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ در x_0 عبارت است از

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

$$= f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{6}(x - x_0)^3 + \cdots$$

پیدار تیلور

نمایش تابع مبتنی بر جمع تعداد نامتناهی از مشتق‌ها

تعریف چندجمله‌ای تیلور

چندجمله‌ای تیلور درجه n از تابع $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ در x_0 عبارت است از

$f^{(k)}(x_0)$ مشتق k-اُم تابع f در نقطه x_0

$\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ ضرائب چندجمله‌ای

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

$$= f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{6}(x - x_0)^3 + \cdots$$

پیدار تیلور- ادامه

تعریف پیدار تیلور

پیدار تیلور تابع هموار $f \in C^{\infty}$ و $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ در x_0 عبارت است از

$$T_{\infty}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

$$= f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{6}(x - x_0)^3 + \cdots$$

پیدار تیلور- ادامه

پیدار مک‌لورن

- مورد خاصی از پیدار تیلور
- $x_0 = 0$

چندجمله‌ای تیلور درجه n تقریبی از تابع f

- امکان چندجمله‌ای نبودن تابع f

شباهت تقریب تیلور در همسایگی x_0 به تابع f

تابع هموار $f \in C^\infty$ و $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ در x_0 عبارت است از

پیدار تیلور- مثال

$$f(x) = \sin(x) + \cos(x) \in C^{\infty}$$

بسط تیلور حول نقطهٔ $x_0 = 0$

$$f(0) = \sin(0) + \cos(0) = 1$$
$$f'(0) = \cos(0) - \sin(0) = 1$$
$$f''(0) = -\sin(0) - \cos(0) = -1$$
$$f^{(3)}(0) = -\cos(0) + \sin(0) = -1$$
$$f^{(4)}(0) = \sin(0) + \cos(0) = f(0) = 1$$

به‌نظر دارای الگو: $f^{(k+4)}(0) = f^{(k)}\ (0)$

پس بسط پیدار تیلور f در نقطهٔ $x_0 = 0$

پیدار تیلور- مثال -ادامه

$$f(x) = \sin(x) + \cos(x) \in C^{\infty}$$

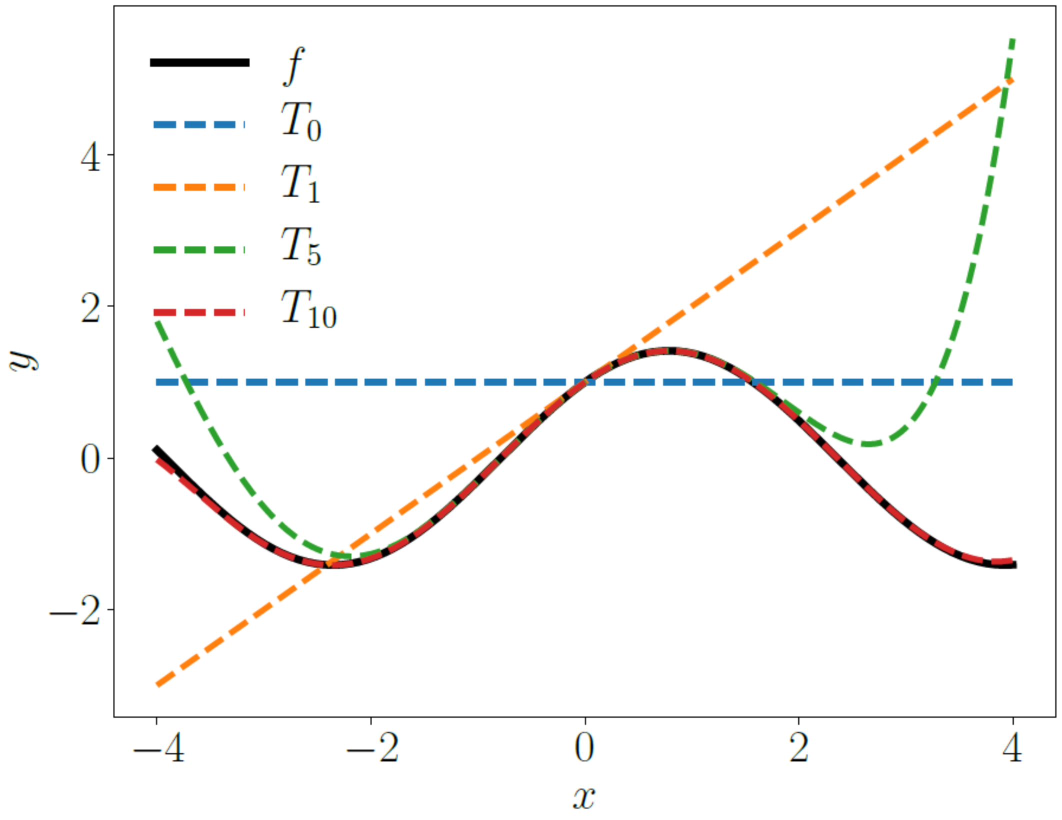
بسط تیلور حول نقطهٔ $x_0 = 0$

$$f(0) = 1, \qquad f'(0) = 1, \qquad f''(0) = -1, \qquad f^{(3)}(0) = -1, \qquad f^{(4)}(0) = 1$$

پس بسط پیدار تیلور f در نقطهٔ $x_0 = 0$

$$\begin{aligned}
T_{\infty}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \\
&= 1 + x - \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots \\
&= \left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 \mp \cdots\right) + \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 \mp \cdots\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{(2k)!}x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1} \\
&= \cos(x) + \sin(x)
\end{aligned}$$

پیدار تیلور- مثال - ادامه



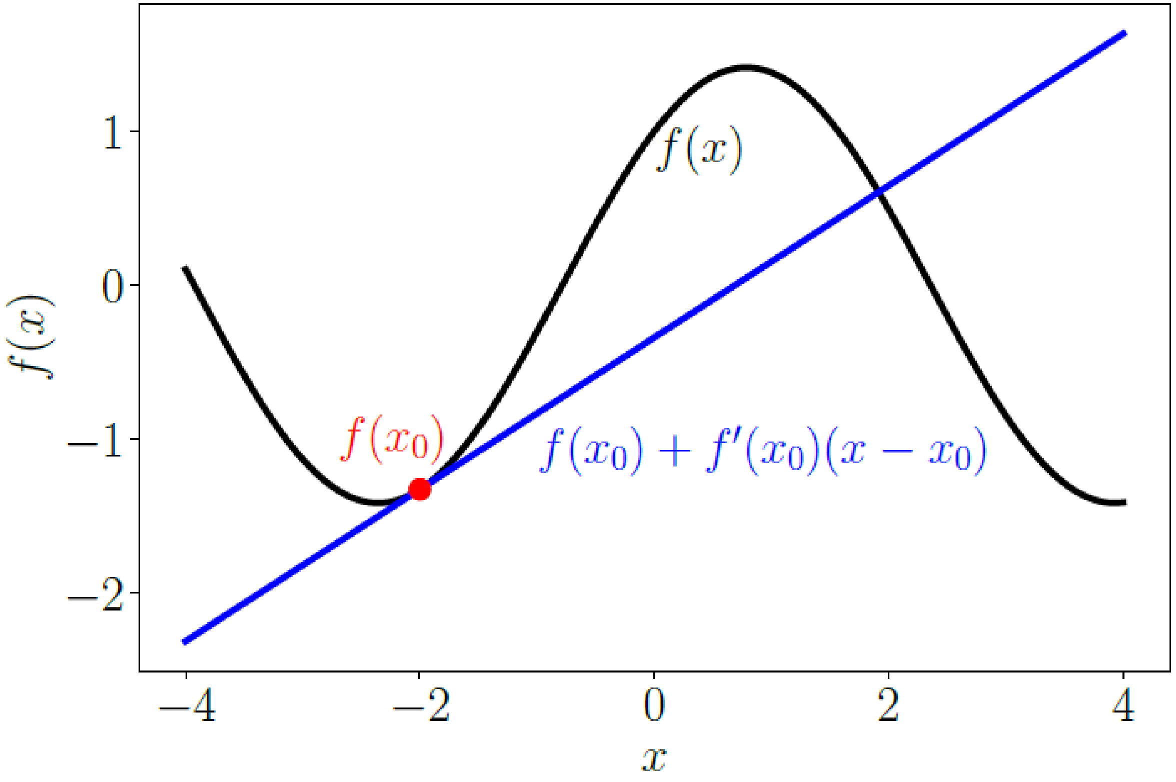
پیدار تیلور- ادامه

پیدار تیلور نمونهٔ خاصی از پیدارهای توانی

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k$$

a_k ضرائب

c ثبات



پیدار تیلور - تقریب

$$f(\boldsymbol{x}) \approx f(\boldsymbol{x}_0) + (\nabla_{\boldsymbol{x}} f)(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)$$

مشتق تابع چند متغیره – گرادیان

$$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$\boldsymbol{x} \to f(\boldsymbol{x})$$
$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$$

مشتق‌پذیری درجه اول

پیوستگی

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \overset{\text{def}}{=} \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + \epsilon, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)}{\epsilon} = \frac{f(x + \epsilon e_i) - f(x)}{\epsilon}.$$

$$\nabla = \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\partial}{\partial x_j}\right] \hat{\mathbf{e}}_j = \left[\frac{\partial}{\partial x_1}\right] \hat{\mathbf{e}}_1 + \left[\frac{\partial}{\partial x_2}\right] \hat{\mathbf{e}}_2 + \ldots + \left[\frac{\partial}{\partial x_n}\right] \hat{\mathbf{e}}_n$$

قاعده زنجیری

$f\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^T$

x_1 و x_2 هر دو تابعی از t

گرادیان f نسبت به t:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1(t)}{\partial t} \\ \frac{\partial x_2(t)}{\partial t} \end{bmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t}$$

قاعده زنجیری - ادامه

$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2$

$x_1 = \sin t$

$x_2 = \cos t,$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t} \\ &= 2\sin t\frac{\partial \sin t}{\partial t} + 2\frac{\partial \cos t}{\partial t} \\ &= 2\sin t\cos t - 2\sin t = 2\sin t(\cos t - 1)\end{aligned}$$

قاعده زنجیری – ادامه

$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^T$

اگر x_1 و x_2 هر دو تابعی از دو متغیر t و s

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial s}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t}$$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}(s,t)} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial (s,t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix}}_{=\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial s} & \frac{\partial x_1}{\partial t} \\ \frac{\partial x_2}{\partial s} & \frac{\partial x_2}{\partial t} \end{bmatrix}}_{=\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial (s,t)}}$$

ویژگی‌های مفید جهت محاسبهٔ گرادیان

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{X}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})^\top = \left(\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})}{\partial \boldsymbol{X}}\right)^\top$$

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{X}}\mathrm{tr}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})) = \mathrm{tr}\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})}{\partial \boldsymbol{X}}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{X}}\det(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})) = \det(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}))\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})^{-1}\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})}{\partial \boldsymbol{X}}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{X}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})^{-1} = -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})^{-1}\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})}{\partial \boldsymbol{X}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})^{-1}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{b}}{\partial \boldsymbol{X}} = -(\boldsymbol{X}^{-1})^\top \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^\top (\boldsymbol{X}^{-1})^\top$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{a}}{\partial \boldsymbol{x}} = \boldsymbol{a}^\top$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{x}} = \boldsymbol{a}^\top$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{X}\boldsymbol{b}}{\partial \boldsymbol{X}} = \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^\top$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}^\top(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^\top)$$

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{s}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{s})^\top \boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{s}) = -2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{s})^\top \boldsymbol{W}\boldsymbol{A}$$

W متقارن:

مشتق تابع چند متغیره- ماتریس هسی

مشتق دوم

ماتریس هسی

مشتق‌پذیری مرتبه دوم

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

پیدار تیلور چندمتغیره

$f\colon \mathbb{R}^D \to \mathbb{R}$

$\boldsymbol{x} \to f(\boldsymbol{x}), \ \ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^D$

هموار در همسایگی $\boldsymbol{x}_0$

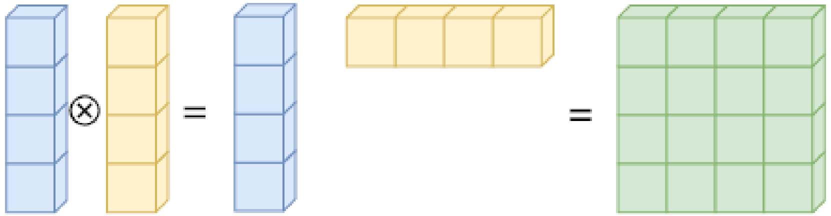
$\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0$

$D_{\boldsymbol{x}}^k f(\boldsymbol{x}_0)$ مشتق k-اُم f نسبت به **x**

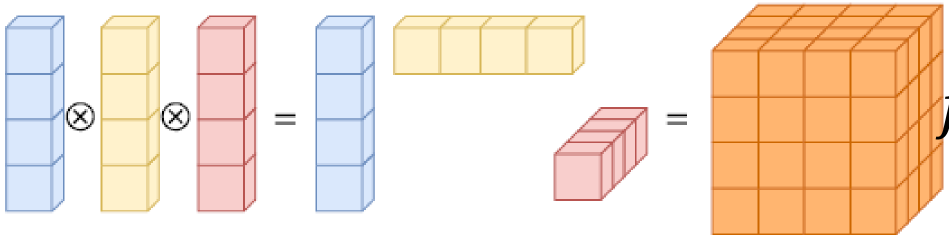
$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D_{\boldsymbol{x}}^k f(\boldsymbol{x}_0)}{k!} \boldsymbol{\delta}^k$$

$D_{\boldsymbol{x}}^k f(\boldsymbol{x}_0)$ و $\boldsymbol{\delta}^k$ هر دو تنسور درجهٔ k-اُم

$$\boldsymbol{\delta}^2 := \boldsymbol{\delta} \otimes \boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\delta}^\top, \quad \boldsymbol{\delta}^2[i,j] = \delta[i]\delta[j]$$



$$\boldsymbol{\delta}^3 := \boldsymbol{\delta} \otimes \boldsymbol{\delta} \otimes \boldsymbol{\delta}, \quad \boldsymbol{\delta}^3[i,j,k] = \delta[i]\delta[j]\delta[k]$$



پیدار تیلور چندمتغیره

$$D_{\boldsymbol{x}}^{k} f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{\delta}^{k} = \sum_{i_1}^{D} \dots \sum_{i_k}^{D} D_{\boldsymbol{x}}^{k} f(\boldsymbol{x}_0)[i_1, \dots, i_k]\, \delta[i_1] \dots \delta[i_k]$$

$$k = 0 : D_{\boldsymbol{x}}^{0} f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{\delta}^{0} = f(\boldsymbol{x}_0) \in \mathbb{R}$$

$$k = 1 : D_{\boldsymbol{x}}^{1} f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{\delta}^{1} = \underbrace{\nabla_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}_0)}_{1\times D} \underbrace{\boldsymbol{\delta}}_{D\times 1} = \sum_{i=1}^{D} \nabla_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}_0)[i]\delta[i] \in \mathbb{R}$$

$$k = 2 : D_{\boldsymbol{x}}^{2} f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{\delta}^{2} = \operatorname{tr}\big(\underbrace{\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}_0)}_{D\times D} \underbrace{\boldsymbol{\delta}}_{D\times 1} \underbrace{\boldsymbol{\delta}^{\top}}_{1\times D}\big) = \boldsymbol{\delta}^{\top} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{\delta}$$

$$= \sum_{i=1}^{D} \sum_{j=1}^{D} H[i, j]\delta[i]\delta[j] \in \mathbb{R}$$

$$k = 3 : D_{\boldsymbol{x}}^{3} f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{\delta}^{3} = \sum_{i=1}^{D} \sum_{j=1}^{D} \sum_{k=1}^{D} D_{\boldsymbol{x}}^{3} f(\boldsymbol{x}_0)[i, j, k]\delta[i]\delta[j]\delta[k] \in \mathbb{R}$$

پیدار تیلور چندمتغیره - مثال

$f(x,y) = x^2 + 2xy + y^3$

$(x_0, y_0) = (1,2)$

$f(1,2) = 13$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2y \implies \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 6$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x + 3y^2 \implies \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 14$$

$$D^1_{x,y} f(1,2) = \nabla_{x,y} f(1,2) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)\right] = [6 \quad 14] \in \mathbb{R}^{1\times 2}$$

$$\frac{D^1_{x,y} f(1,2)}{1!}\boldsymbol{\delta} = [6 \quad 14]\begin{bmatrix} x-1 \\ y-2 \end{bmatrix} = 6(x-1) + 14(y-2)$$

پیدار تیلور چندمتغیره - مثال

$f(x, y) = x^2 + 2xy + y^3$

$(x_0, y_0) = (1,2)$

$f(1,2) = 13$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \implies \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,2) = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y \implies \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,2) = 12$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2 \implies \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,2) = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2 \implies \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,2) = 2$$

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6y \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{H}(1,2) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 12 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

پیدار تیلور چندمتغیره - مثال

$f(x, y) = x^2 + 2xy + y^3$

$(x_0, y_0) = (1,2)$

$f(1,2) = 13$

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6y \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{H}(1,2) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 12 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

$$\begin{aligned} \frac{D^2_{x,y} f(1,2)}{2!} \boldsymbol{\delta}^2 &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\delta}^\top \boldsymbol{H}(1,2) \boldsymbol{\delta} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x-1 & y-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-1 \\ y-2 \end{bmatrix} \\ &= (x-1)^2 + 2(x-1)(y-2) + 6(y-2)^2 \end{aligned}$$

پیدار تیلور چندمتغیره - مثال

$f(x, y) = x^2 + 2xy + y^3$

$(x_0, y_0) = (1,2)$

$f(1,2) = 13$

$$D^3_{x,y}f = \begin{bmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial x} & \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial y} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2\times 2},$$

$$D^3_{x,y}f[:,:,1] = \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} & \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} & \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \end{bmatrix}$$

$$D^3_{x,y}f[:,:,2] = \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial y} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} & \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y} \\ \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} & \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = 6 \implies \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(1,2) = 6$$

$$D^3_{x,y}f[:,:,1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D^3_{x,y}f[:,:,2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\frac{D^3_{x,y}f(1,2)}{3!}\boldsymbol{\delta}^3 = (y-2)^3$$

پیدار تیلور چندمتغیره - مثال

$f(x,y) = x^2 + 2xy + y^3$

$(x_0, y_0) = (1,2)$

$f(1,2) = 13$

$$f(x) = f(1,2) + D^1_{x,y} f(1,2)\boldsymbol{\delta} + \frac{D^2_{x,y} f(1,2)}{2!}\boldsymbol{\delta}^2 + \frac{D^3_{x,y} f(1,2)}{3!}\boldsymbol{\delta}^3$$

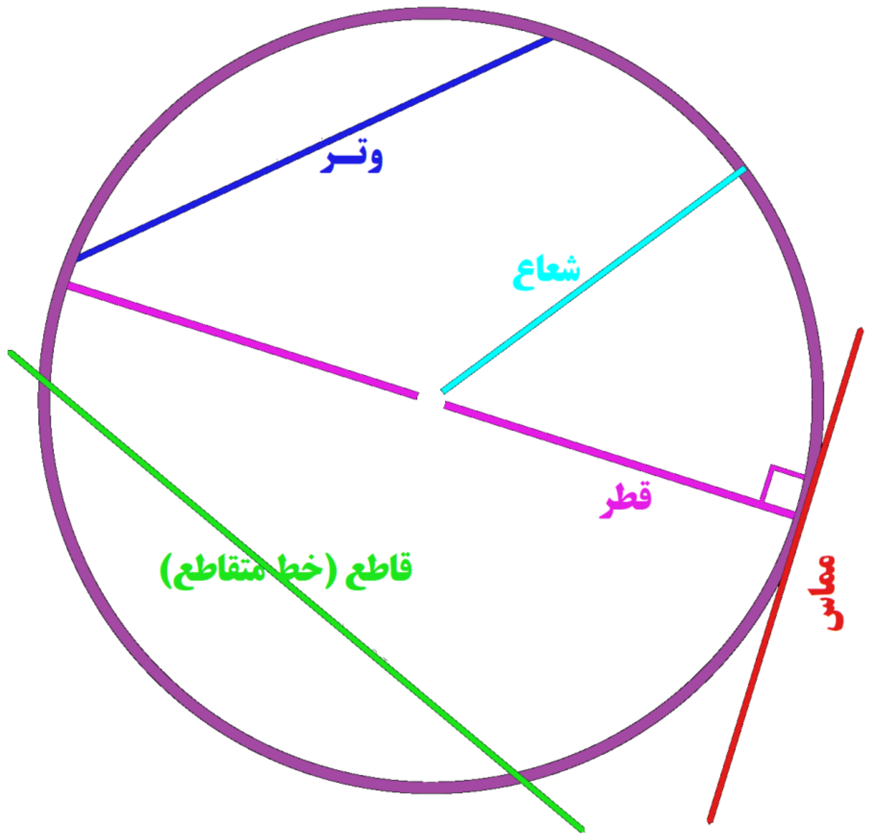
$$\begin{aligned}
&= f(1,2) + \frac{\partial f(1,2)}{\partial x}(x-1) + \frac{\partial f(1,2)}{\partial y}(y-2) \\
&\quad + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f(1,2)}{\partial x^2}(x-1)^2 + \frac{\partial^2 f(1,2)}{\partial y^2}(y-2)^2\right. \\
&\quad \left. + 2\frac{\partial^2 f(1,2)}{\partial x \partial y}(x-1)(y-2)\right) + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 f(1,2)}{\partial y^3}(y-2)^3 \\
&= 13 + 6(x-1) + 14(y-2) \\
&\quad + (x-1)^2 + 6(y-2)^2 + 2(x-1)(y-2) + (y-2)^3
\end{aligned}$$

خط مماس بر منحنی

خط مماس بر خم صفحه‌ای در نقطهٔ معین

صرفا لمس منحنی در آن نقطه

نسبت خط و دایره

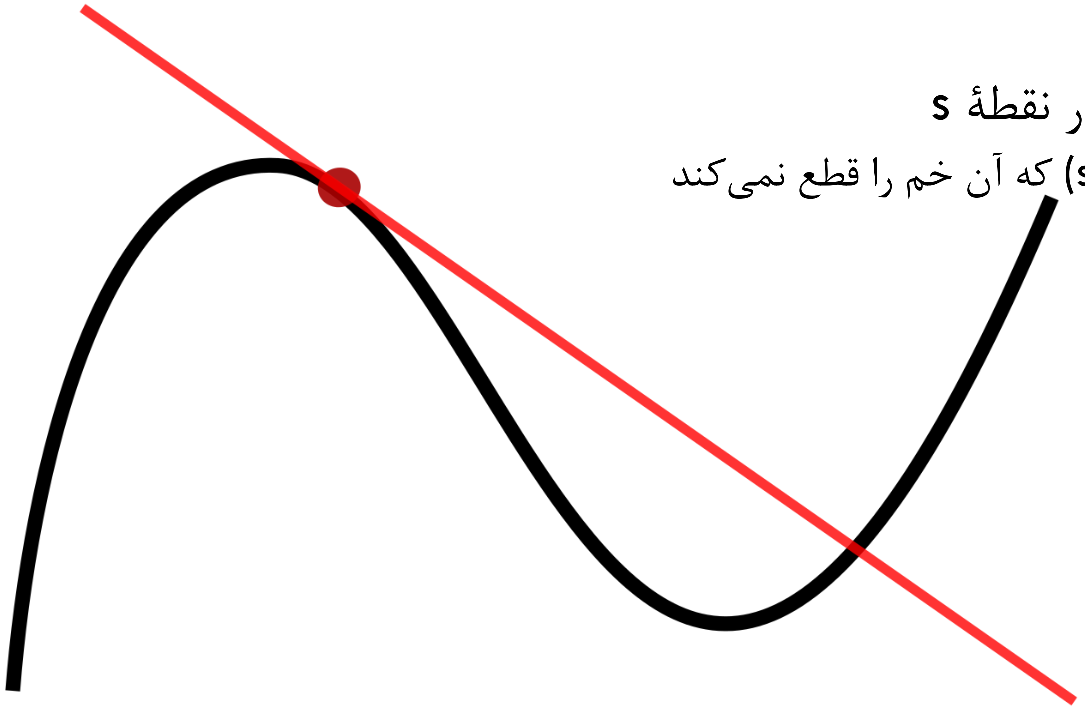


مماس در تابع تک متغیره

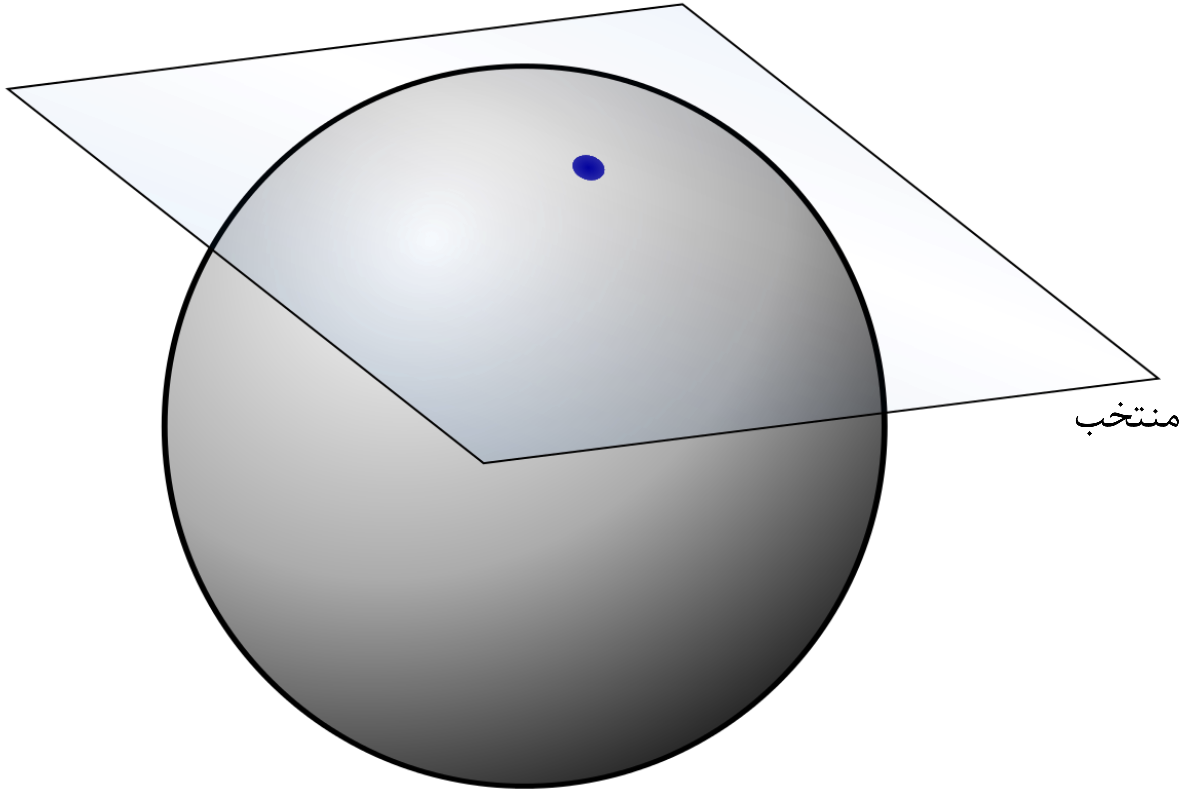
$y=f(x)$

فرض مماس بر منحنی در نقطهٔ s

- خط راست گذرنده از $(s,f(s))$ که آن خم را قطع نمی‌کند
- شیبی برابر $f'(s)$
  - f' مشتق f



مماس در تابع دو متغیره



صفحه مماس بر نقطهٔ خاص

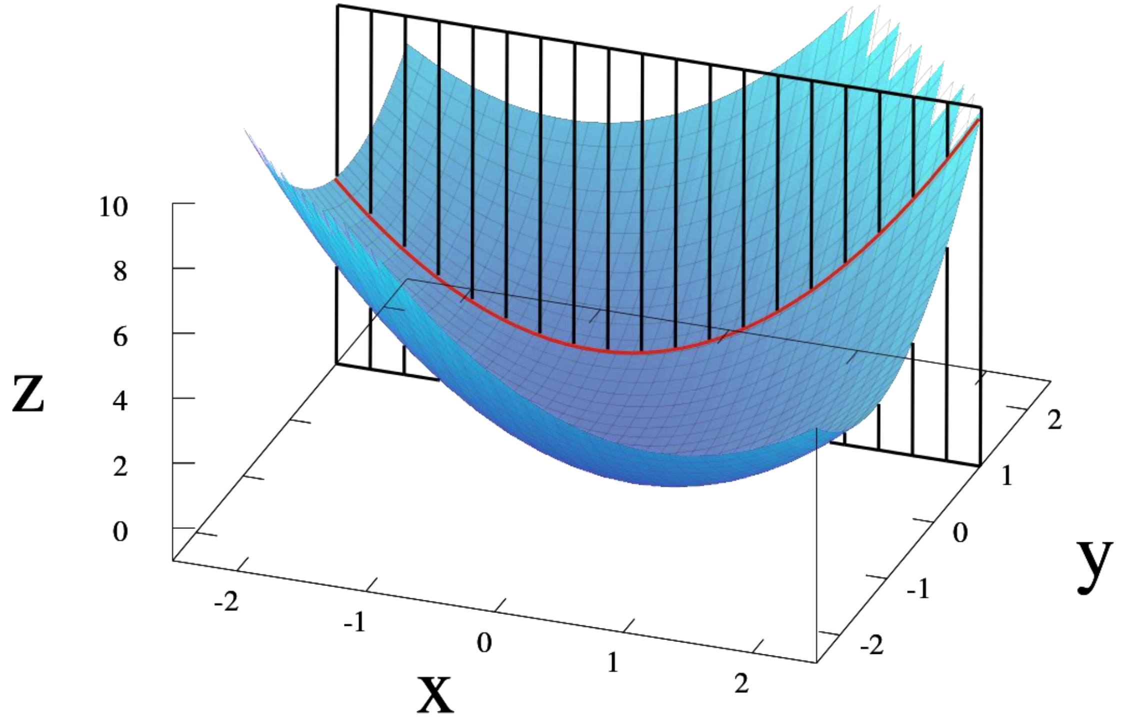
چند خط مماس بر هر نقطه؟

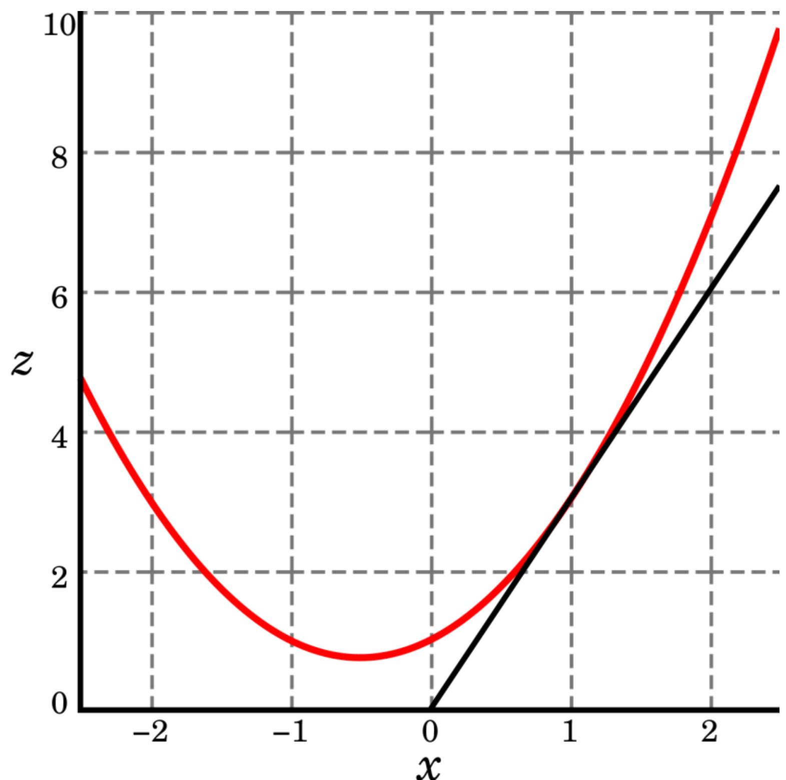
- بی‌نهایت

مشتق جزئی

- انتخاب یکی از این خطوط و یافتن شیب خط منتخب

$$z = x^2 + xy + y^2$$





مشتق‌های جهت‌دار

مشتق: اندازه‌گیری حساسیت به تغییرِ مقدار تابع با توجه به تغییر ورودی

مشتق‌های جهت‌دار: سرعت لحظه‌ای تغییرات تابع در راستای بردار $\boldsymbol{p}$ در نقطه $\boldsymbol{x}$

تعمیم مشتق‌های جزیی

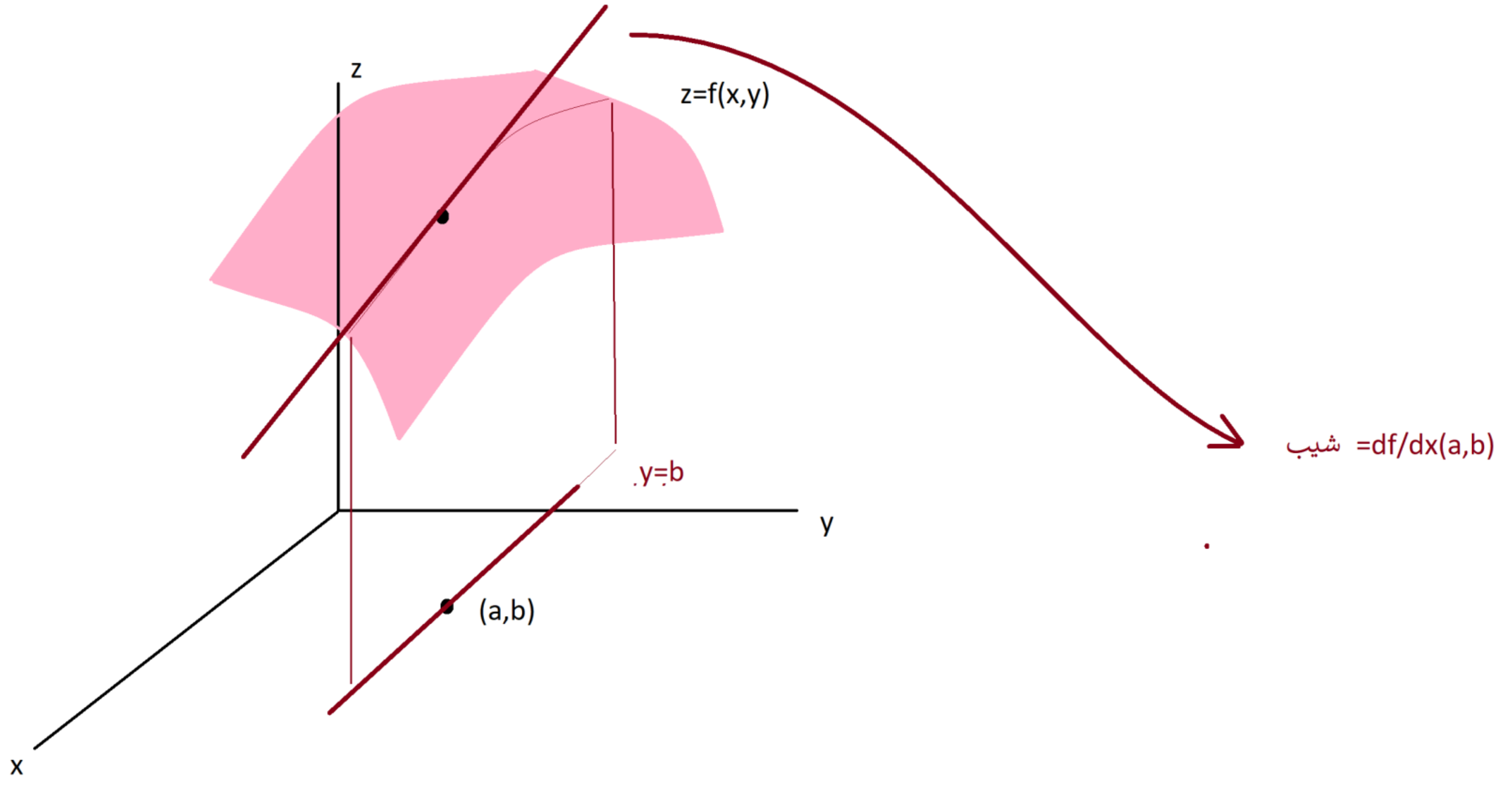
- مشتق‌های جهت‌دار در راستای هر محور
- نمایش با بردارها
  - بردار واحد
- روی صفحه (ابرصفحهٔ) متغیرها

مشتق‌های جهت‌دار

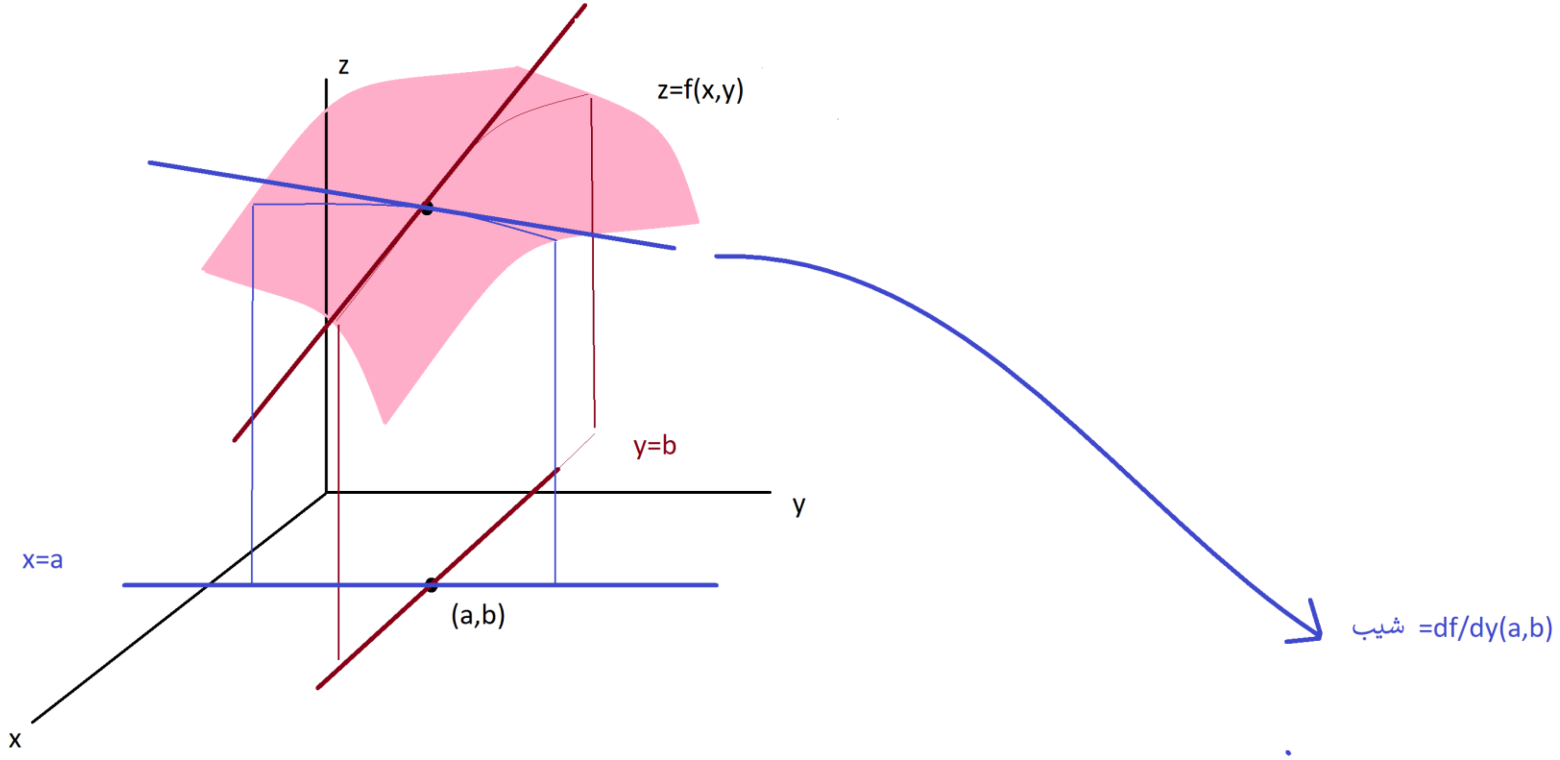
$$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$$
$$\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n$$
$$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$D(f(\boldsymbol{x}); \boldsymbol{p}) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(\boldsymbol{x} + \epsilon \boldsymbol{p}) - f(\boldsymbol{x})}{\epsilon}$$

گرادیان و مشتق جهت‌دار



گرادیان و مشتق جهت‌دار



گرادیان و مشتق جهت‌دار

$\boldsymbol{p} = (p_0, p_1),$

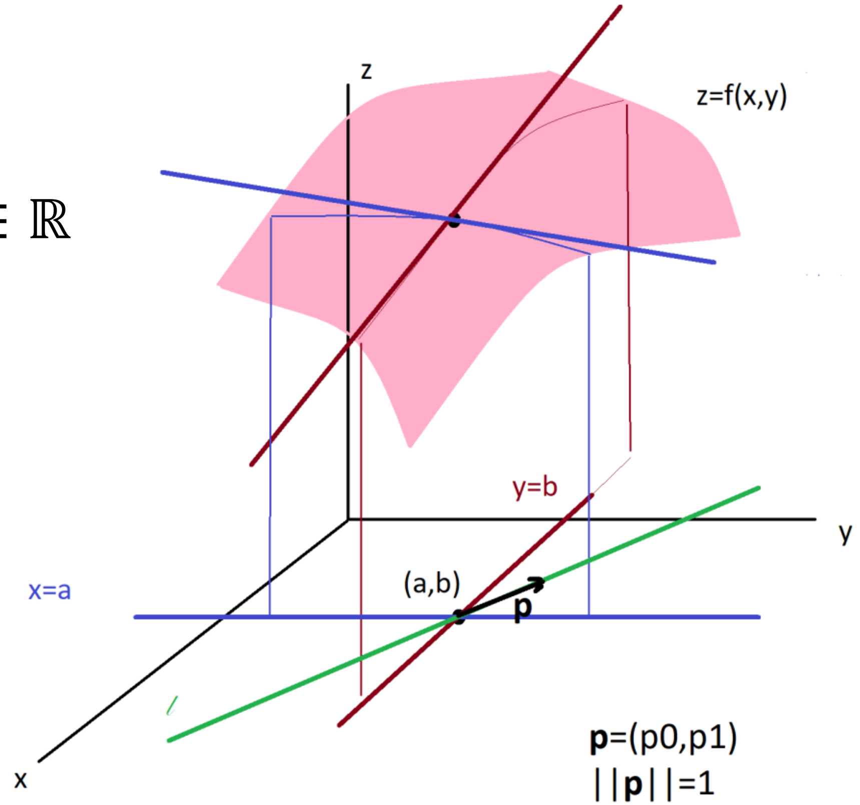
$\|\boldsymbol{p}\| = 1$

$l = (a + p_0 t, b + p_1 t), t \in \mathbb{R}$

$x = a + p_0 t$

$y = b + p_1 t$

$t = \frac{x-a}{p_0} \Longrightarrow y = mx + c$



گرادیان و مشتق جهت‌دار

$$f(a+p_0t, b+p_1t) \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = a + p_0 t \\ y = b + p_1 t \end{Bmatrix} \Leftrightarrow t$$

$$D(f(a,b);\boldsymbol{p}) = \frac{df}{dt}|_{t=0}$$

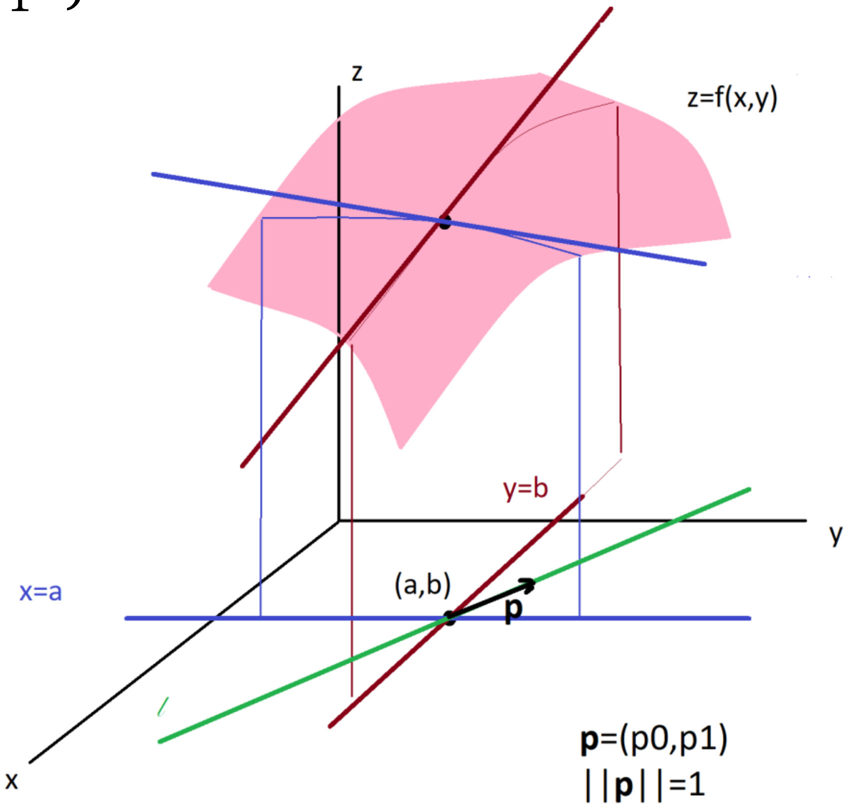
استفاده از قاعدهٔ زنجیری

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}p_0 + \frac{\partial f}{\partial y}p_1$$

$$= (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}).(p_0, p_1)$$

$$= \nabla f(a,b).\boldsymbol{p}$$



گرادیان و مشتق جهت‌دار

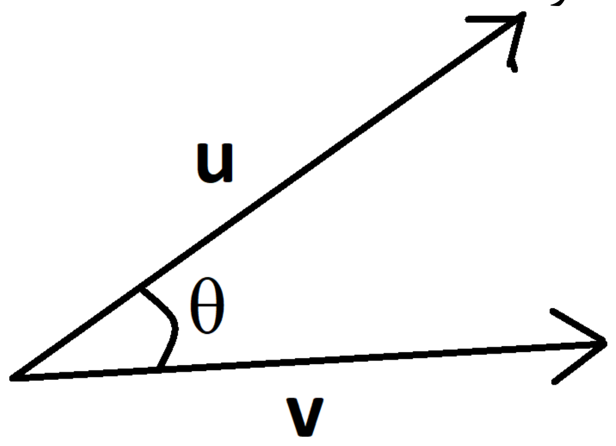
$$D(f(a,b);\boldsymbol{p}) = \nabla f(a,b).\boldsymbol{p}$$

$$\nabla f(a,b)=(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b),\frac{\partial f}{\partial y}(a,b))$$

گرادیان و مشتق جهت‌دار

$$\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|cos\theta$$

ضرب داخلی دو بردار عمود بر هم برابر صفر



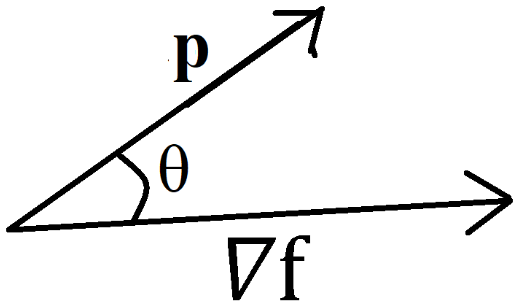
گرادیان و مشتق جهت‌دار

$D(f(a,b);\boldsymbol{p}) = \nabla f(a,b).\boldsymbol{p}$

$= \|\nabla f\|\|\boldsymbol{p}\|cos\theta$

$= \|\nabla f\|cos\theta$

$-1 \leq cos\theta \leq 1$



$cos\theta = 1 \Longrightarrow D(f;\boldsymbol{p}) =$ بیشینه $= \|\nabla f\|$

$cos\theta = -1 \Longrightarrow D(f;\boldsymbol{p}) =$ کمینه $= -\|\nabla f\|$

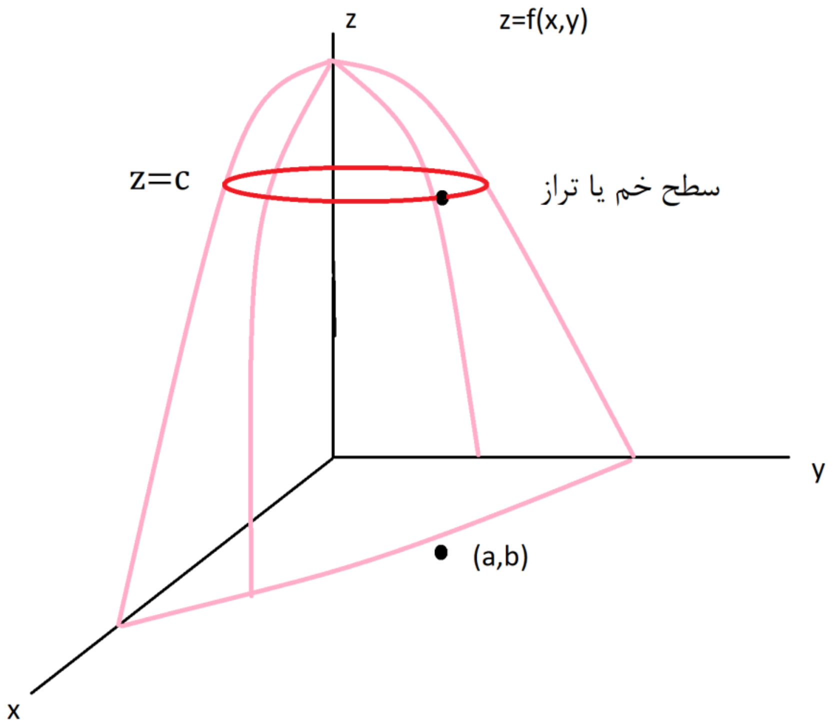
گرادیان و مشتق جهت‌دار

جهت بیش نزولی

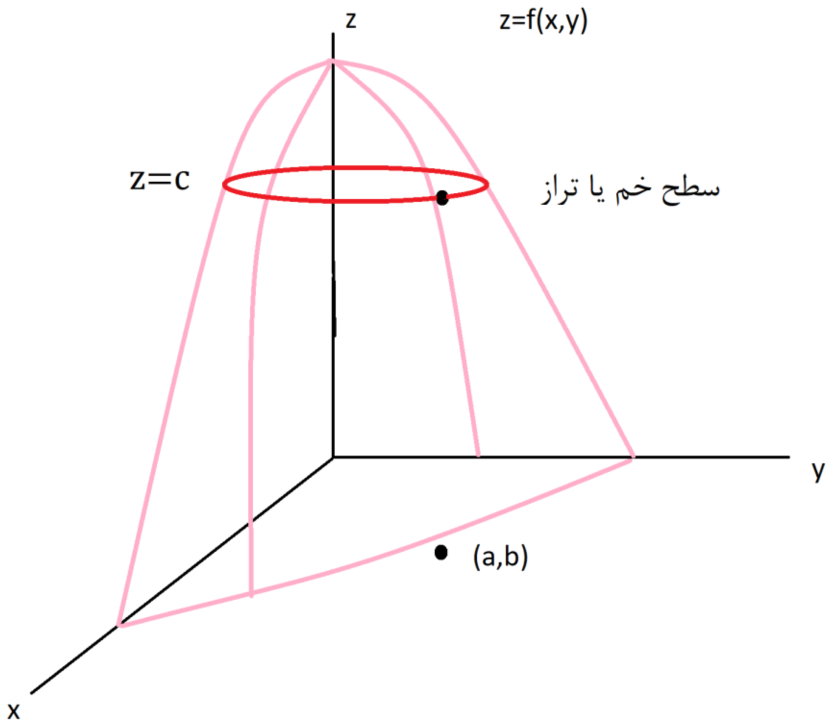
- در راستای $-\nabla f$

جهت بیش صعودی

- در راستای ∇f
- ∇f و $\mathbf{p}$ هم‌جهت



گرادیان و مشتق جهت‌دار



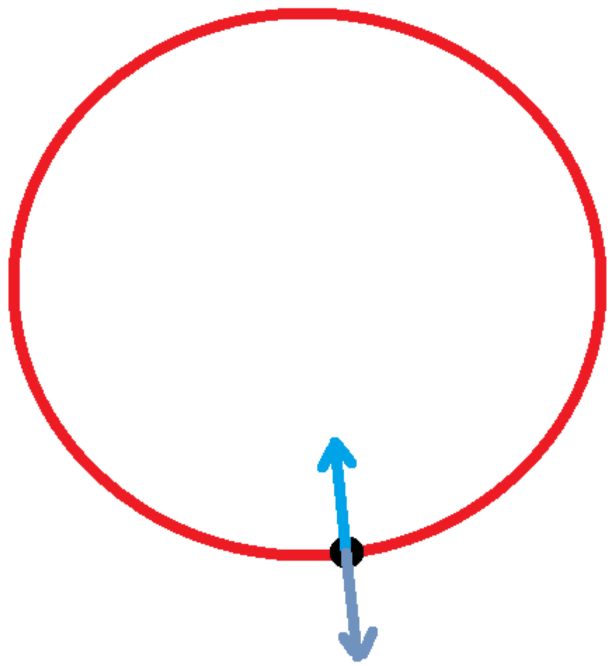
∇f همیشه عمود بر تراز

- بردار گرادیان دو بعدی است

گرادیان و مشتق جهت‌دار

∇f همیشه عمود بر تراز

- بردار گرادیان دو بعدی است

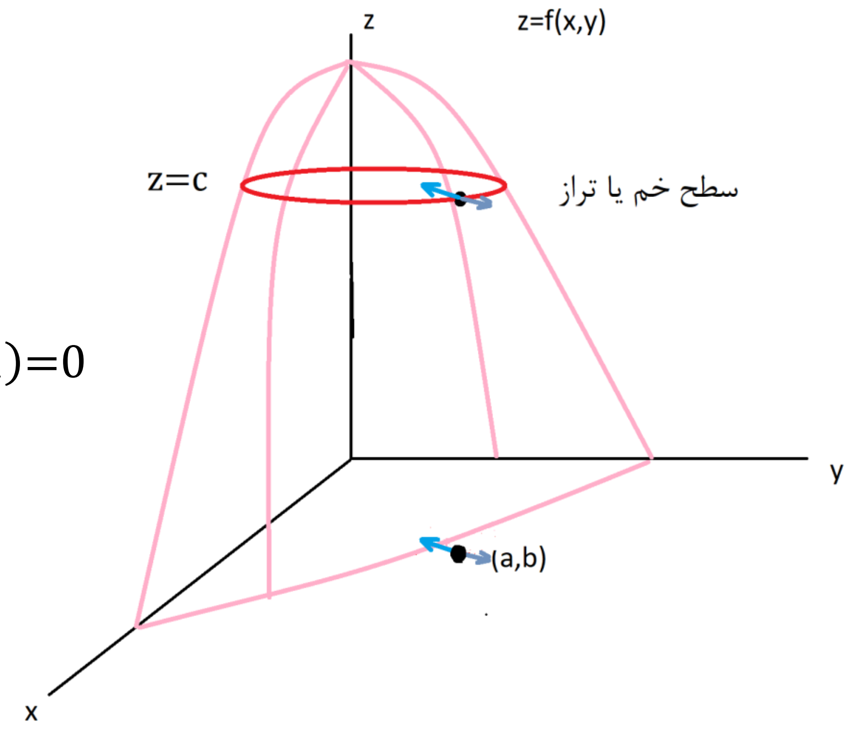


گرادیان و مشتق جهت‌دار

∇f همیشه عمود بر تراز

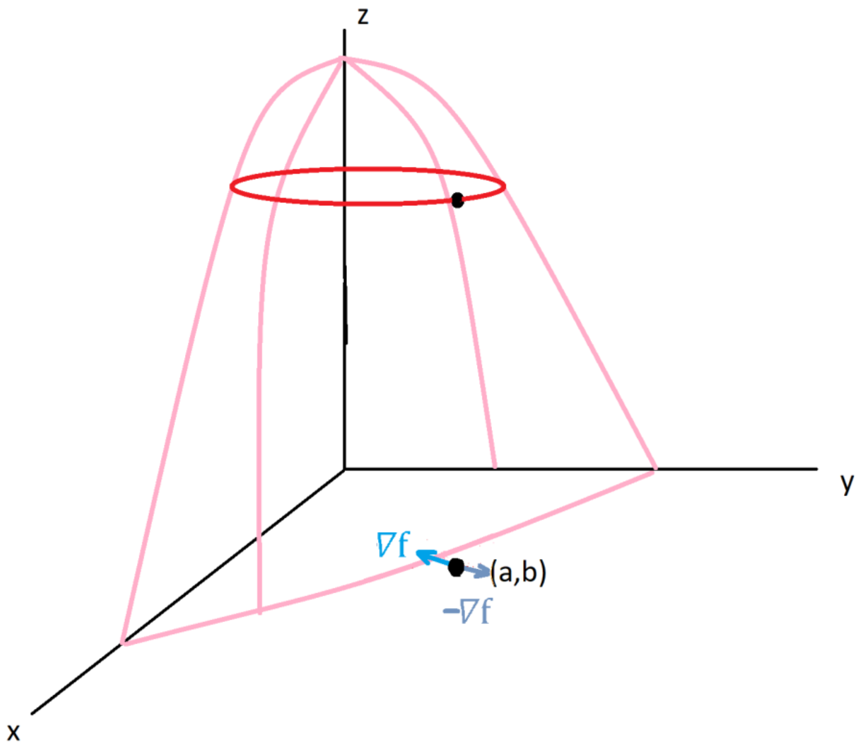
- بردار گرادیان دو بعدی است

- $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, 0)$
- $z = c \xRightarrow{\text{مشتق}} (0,0,1)$
- $\Longrightarrow (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, 0).\ (0,0,1) = 0$



گرادیان و مشتق جهت‌دار

بیش سرعت نزول: $-\nabla f$



منابع

[داینزروث]

[نازهدل]

Rhonda Hughes